O zbieżności pewnych ciągów liczbowych.

I. Weźmy równanie:

$$[2] \qquad x = a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a^x}}}}}$$

w którym a jest powtórzone w ten sposób dowolną liczbę razy, np. n razy. Oznaczmy je symbolicznie:

$$[2] \qquad x = a^{(n)x}$$

Dowiedźmy, iż wszystkie równania tego typu mają te same i tylko te same pierwiastki rzeczywiste (i dodatnie), przy założeniu:

$$a \geqslant e^{-e},$$

co równanie:

$$[1] \qquad x = a^x$$

Trzeba tedy dowieść, iż pierwiastki każdego z tych równań [2] czynią zadość równaniu [1] — bo rzeczą jest oczywistą, że pierwiastek równania [1] musi czynić zadość każdemu równaniu ogólniejszemu.

$$x = a^x \text{ daje:}$$

$$a^{a^x} = a^x = x \quad \text{i t. d.}$$

1) $$a > 1$$

Przypuśćmy, że jakaś wartość x_0, czyniąca zadość równ. [2], nie czyni zadość [1], że np.:

$a^{x_0} > x_0$ (podobne rozumowanie byłoby zastosowane do $a^{x_0} < x_0$).

W takim razie, ponieważ $a > 1$, a w tym wypadku powiększenie wykładnika pociąga za sobą powiększenie potęgi, przeto:

$$a^{a^{x_0}} > a^{x_0}$$

i tym bardziej: $$a^{a^{x_0}} > x_0 \quad \text{i t. d.}$$

ogólnie: $$a^{(n)x_0} > a^{(n-1)x_0} > .... > x_0$$

A więc x_0 nie jest pierwiastkiem równania $x = a^{(n)x}$, co nie zgadza się z naszym założeniem. Należy tedy stwierdzić, iż x_0 jest pierwiastkiem równania [1]. *c. b. d. d.*

2) $a = 1$. Ten wypadek nie wymaga żadnych szczególnych roztrząsań.

3) $a < 1$. Ten wypadek wymaga wyliczeń bardziej złożonych.

Dowiedźmy z początku:

A. Równanie

$$x = a^{a^x}$$

posiada przy $1 > a \geqslant e^{-e}$ jeden pierwiastek, przy $a < e^{-e}$ 3 pierwiastki odmienne.

Poszukajmy tedy zer funkcji:

$$y = x - a^{a^x};$$

pochodna względem x:

$$y' = 1 - a^{a^x} a^x log^2 a$$

$$y'' = - log^2 a(a^{a^x} a^x log^2 a . a^x + a^{a^x} a^x log a) = - log^3 a . a .^{a^x} a^x (a^x log a + 1).$$

Weźmy pochodną funkcji:

$$z = a^x log a + 1.$$

$$z' = a^x log^2 a$$

$$a^x > 0 \qquad log^2 a > 0$$

a więc $z' > 0$; z stale wzrasta od $log a + 1$ do $a\, log a + 1$, przechodząc przez 0 lub nie, zależnie od wartości a.[1])

---

[1]) Gdy $$a \leqslant e^{-e}$$

$$log a + 1 \leqslant 1 - e < 0$$

$$1 + a log a > 0$$

Stąd wnosimy, iż y'', które się różni od z tylko czynnikiem

$$-\log^3 a\ a^{a^x} a^x > 0\,,$$

nie przechodzi przez 0 ani razu lub tylko raz jeden. Odpowiednia wartość x (t. j. ta, przy której $y''=0$) będzie dana przez równanie:

$$a^x = -\frac{1}{\log a}$$

stąd:

$$a^{a^x} = e^{\log a . a^x} = e^{-1} = \frac{1}{e}\,.$$

Rozpatrzmy teraz y'

przy $x=0$

$$y'(0) = 1 - a\log^2 a\,;$$

przy $x=1$

$$y'(1) = 1 - a^a a \log^2 a\,.$$

Szukając minimum lub maximum funkcji $y'(0)$, rozpatrywanej jako funkcja zmiennej a, znajdujemy wartość dodatnią,[2]) a ponieważ

(można to sprawdzić, biorąc pochodną względem a: $\frac{a}{a} + \log a = 1 + \log a$, co jest < 0 przy $a \leqslant e^{-e}$; więc $1 + a\log a$ rośnie, gdy a maleje, a przy $a = e^{-e}$

$$1 + a\lg a = 1 - \frac{e}{e^e} \text{ jest } > 0,$$

tymbardziej tedy jest > 0 przy $a < e^{-e}$).

Stąd przy $a < e^{-e}$ z przechodzi przez 0. Jest to zupełnie zgodne z rachunkami, podanemi w dalszym ciągu. Gdy z nie przechodzi przez 0 ($\log a > -1$, $a > \frac{1}{e}$), wtedy y'' pozostaje wciąż > 0, y' wciąż wzrasta pomiędzy dwiema granicami, większemi od 0, a więc pozostaje > 0, przeto równanie $y=0$ czyli $x = a^{a^x}$ ma tylko jeden pierwiastek. Dowodzimy tego samego w dalszym ciągu nietylko dla $a > \frac{1}{e}$, lecz dla $a > e^{-e}$.

[2]) Pochodna:

$1 - a\log^2 a$ względem a równa się:

$$-\left(\log^2 a + 2\log a\,\frac{a}{a}\right)$$

Równanie:

$$\log^2 a + 2\log a = 0$$

wartości graniczne przy a dążącym do 0 i $a=1$ są również >0, przeto $y'(0)$ przy wszelkim a, takim iż

$$0<a<1$$

jest dodatnie. Tym bardziej:

$$y'(1)>0 .$$

Zbadajmy teraz wartość y' przy tej wartości x, która daje:

$$y''=0 \quad (a^x=-\frac{1}{loga})$$

$$(a^{a^x}=e^{-1})$$

$$y'_{\text{(max lub min)}}=1-\frac{1}{e}(-\frac{1}{loga})log^2a=1+\frac{loga}{e}$$

Nierówność:

$$1+\frac{loga}{e}>0 \text{ daje:}$$

$$loga>-e$$

$$a>e^{-e}$$

Przeto, gdy $a>e^{-e}$, wartość maksymalna czy minimalna y' jest >0, a że dwie wartości graniczne są również >0, więc y' pozostaje w całym przedziale wartości x-ów od 0 do 1 wielkością dodatnią; $y=x-a^{a^x}$ stanowi funkcję rosnącą od $-a$ (przy $x=0$) do $1-a^a$ (przy $x=1$), a więc przechodzi przez 0 tylko j e d e n raz.

Równanie:

$$x-a^{a^x}=0$$

ma w tych warunkach t y l k o j e d e n p i e r w i a s t e k.

---

daje:

$$loga=0,\ a=1;\ 1-a\,log^2a=1;$$

$$\text{lub: } log\,a=-2 .$$

$$a=e^{-2} \text{ przy tej wartości } a:$$

$$y'(0)=1-4e^{-2}$$

$$\text{więc: } y'(0)>0 .$$

$$\text{przy } a=0:$$

$$\lim_{a=0} a\,log^2a=0$$

$$\lim_{a=0} (1-a\,log^2a)=1.$$

$$\text{Gdy} \quad a = e^{-e}$$

$$y'_{min} = 0.$$

Odpowiednia wartość x (ta sama przy której $y'' = 0$) jest dana przez:

$$a^{a^x} = e^{-1}\,; \; a^x = -\frac{1}{log a}\,.$$

$$a = e^{-e}\,; \quad log a = -e;$$

więc

$$a^x = -\frac{1}{-e} = e^{-1}\,;$$

$$e^{-ex} = e^{-1}\,,$$

$$-ex = -1\,,$$

$$x = \frac{1}{e} = e^{-1}\,;$$

$$\text{stąd: } x = a^{a^x}\,.$$

Przy $a = e^{-e}$ funkcja $y = x - a^{a^x}$ równa się 0, gdy $x = \frac{1}{e}$, i jed-

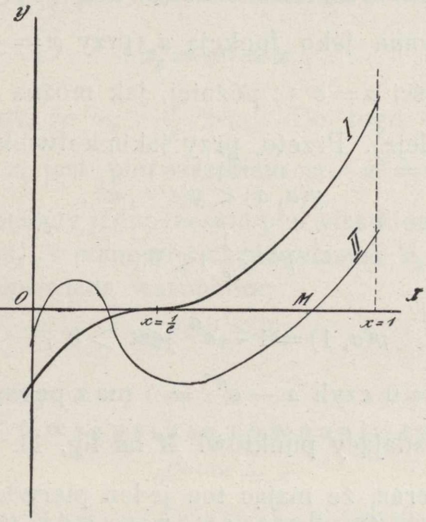


Fig. 1.

nocześnie równają się zeru jej pierwsza i druga pochodna. Postać krzywej w tym wypadku wyobraża fig. 1: krzywa, oznaczona I, odpowiada $a = e^{-e}$, II zaś — $a < e^{-e}$.

Rozpatrzmy teraz $y = x - a^{a^x}$ jako funkcję zmiennej a:

$$\frac{\partial y}{\partial a} = \frac{\partial(-e^{a^x loga})}{\partial a} = -a^{a^x}\frac{\partial(a^x\, loga)}{\partial a} =$$

$$= -a^{a^x}(xa^{x-1}.\, loga + \frac{a^x}{a}) = -a^{a^x}a^{x-1}[x\, loga + 1]\;.$$

Weźmy:

$$a \leqslant e^{-e}$$

$$x = \frac{1}{e} = e^{-1}\;;$$

wtedy:

$$log\, a \leqslant -e\;;\; |log\, a| \geqslant e;$$

$$|x\, log\, a| \geqslant \frac{e}{e},$$

$$\text{czyli: } \geqslant 1$$

$$x\, loga + 1 \leqslant 0,$$

$$\frac{\partial y}{\partial a} \geqslant 0.$$

Ponieważ to zachodzi dla każdego $a \leqslant e^{-e}$, więc możemy wnosić, że y, rozpatrywana jako funkcja a (przy $x = \frac{1}{e}$), jest funkcją rosnącą (aż do wartości $a = e^{-e}$; później, jak można się łatwo przekonać, $\frac{\partial y}{\partial a} < 0$, funkcja maleje). Przeto, przy jakimkolwiek $a < e^{-e}$ i $x = \frac{1}{e}$

$$y(a, x) < y(e^{-e}, x),$$

czyli:

$$y(a, \frac{1}{e}) < 0;$$

a że:

$$y(a, 1) = 1 - a^a \text{ jest } > 0\;,$$

przeto równanie $y = 0$ czyli $x - a^{a^x} = 0$ ma z pewnością jeden pierwiastek $> \frac{1}{e}$ (odpowiadający punktowi M na fig. 1).

Dowiedźmy teraz, że mając ten jeden pierwiastek, równanie posiada jeszcze 2 inne. Oznaczmy ten pierwiastek przez x_3.

$$x_3 > \frac{1}{e},$$

$$a^{x_3} < a^{\frac{1}{e}};$$

a że: $$a < e^{-e},$$

więc: $$a^{\frac{1}{e}} < (e^{-e})^{\frac{1}{e}},$$

$$a^{\frac{1}{e}} < e^{-1},$$

$$a^{x_3} < \frac{1}{e};$$

kładziemy:

$$a^{x_3} = x_1 \;.\; [x_1 < \frac{1}{e} \;.$$

Wiemy że:

$$x_3 = a^{a^{x_3}};$$

stąd:

$$a^{x_1} = a^{a^{x_3}} = x_3 = log_a x_1,$$
$$a^{x_1} = log_a x_1$$
$$a^{a^{x_1}} = a^{log_a x_1} = x_1;$$

x_1 stanowi również pierwiastek równania $x - a^{a^x} = 0$. Gdyby więcej pierwiastków nie było, to jeden z 2-ch (x_1 lub x_3) musiałby stanowić jednocześnie (p. wyżej) pierwiastek równania $x = a^x$, np. x_3.

Wtedy:

$$x_3 = a^{x_3} = x_1,$$

podczas kiedy wiemy, że $x_3 > \frac{1}{e} > x_1$. Do tego samego doprowadza przypuszczenie, iż x_1 jest pierwiastkiem $x - a^x = 0$. A więc pierwiastek $x - a^{a^x} = 0$, będący jednocześnie pierwiastkiem $x - a^x = 0$, nie jest równy ani x_1, ani x_3, i stanowi 3-ci pierwiastek x_2, który, jak się przekonamy później, odpowiada warunkom:

$$x_3 > x_2 > x_1 \;.$$

c. b. d. d.

Teraz znajdziemy:

B. Przy $a < 1$ wszystkie równania typu:

$$a^{(2n+1)x} = x$$

mają jeden i ten sam pierwiastek, równy pierwiastkowi równania [1]

$$x = a^x \;.$$

Sprawdzamy, że przy $a < 1$,

gdy: $$x_1 > x_2,$$

$$a^{x_1} < a^{x_2} \quad [a^x \text{ — funkcja malejąca}];$$

stąd:

$$a^{a^{x_1}} > a^{a^{x_2}} \quad [a^{a^x} \text{ — funkcja rosnąca}];$$

dalej:

$$a^{a^{a^{x_1}}} < a^{a^{a^{x_2}}} \quad [a^{a^{a^x}} \text{ — funkcja malejąca}],$$

i t. d.

$$a^{(2n)x_1} > a^{(2n)x_2}$$

stąd

$$a^{a^{(2n)x_1}} < a^{a^{(2n)x_2}},$$

czyli

$$a^{(2n+1)x_1} < a^{(2n+1)x_2},$$

a że

$$a^{(2n)x_1} > a^{(2n)x_2} \text{ przy } n = 1$$

więc drogą indukcji zupełnej dochodzimy, iż wszystkie funkcje typu:

$$a^{(2n+1)x} \quad \text{przy } a < 1, \quad x > 0$$

są funkcjami malejącemi, a że funkcja $z = x$ jest funkcją rosnącą, więc 2 krzywe:

$$y = a^{(2n+1)x}$$
$$y = x$$

mogą się spotkać tylko w jednym punkcie. Równanie $x - a^{(2n+1)x} = 0$ ma tylko jeden pierwiastek, który musi być jednocześnie pierwiastkiem równ.

$$[1] \quad x = a^x$$

(ponieważ wiemy, iż pierwiastek [1] czyni zadość wszelkiemu równaniu $x - a^{(n)x} = 0$).

c. b. d. d.

C. Wszystkie równania typu

$$x = a^{(2n)x}$$

mają ten sam pierwiastek (przy $a \geqslant e^{-e}$) lub te same 3 pierwiastki (przy $a < e^{-e}$), co równanie

$$x = a^{a^x}.$$

Istotnie, przypuśćmy, że pierwiastek równania $x = a^{(2n)x}$ równa się x_n. Zobaczymy, iż x_n musi być pierwiastkiem

$$x = a^{a^x}.$$

Przypuśćmy:

$$a^{a^{x_n}} > x_n \quad [a^{a^{x_n}} < x_n \text{ dałoby podobne wyniki}];$$

wtedy, ponieważ funkcja a^{a^x} jest funkcją rosnącą,

$$a^{a^{a^{x_n}}} > a^{a^{x_n}} > x_n$$

i t. d.

$$a^{(2_n)x_n} > a^{(2_n-2)x_n} > \ldots > a^{a^{x_n}} > x_n$$

czyli że x_n nie byłoby pierwiastkiem

$$x = a^{(2n)x} .$$

II. Rozpatrzmy teraz ciąg liczbowy następujący:

$$[3] \qquad a,\ a^a,\ a^{a^a},\ \ldots.\ a^{\cdot^{\cdot^{a^a}}} \quad (n \text{ razy})\ldots$$

oznaczmy

$$a^{a^{\cdot^{\cdot^{a}}}} \quad (n \text{ razy}) \text{ przez:}$$

$$a^{(n)}$$

przy $a > 1$ ciąg ten będzie ciągiem rosnącym:

$$a^a > a ,$$

$$a^{a^a} > a^a \text{ i t. d.}$$

Czy posiada, i w jakim wypadku, granicę czy też wyrazy jego wzrastają nieograniczenie? Dowiedźmy:

A. Przy

$$1 < a \leqslant e^{\frac{1}{e}}$$

ciąg [3] posiada granicę, równą mniejszemu pierwiastkowi równania [1]: $x = a^x$, (a więc i [2]: $x = a^{(n)x}$).

Istotnie, jeżeli x_1 jest mniejszym pierwiastkiem równania [1], to $x_1 > 1$ daje:

$$a^{x_1} > a$$

czyli:

$$x_1 > a \quad (\text{ponieważ } x_1 = a^{x_1});$$

stąd:

$$a^{x_1} > a^a ,$$

czyli:

$$x_1 > a^a$$

i t. d.

Zwykły mechanizm indukcji zupełnej da nam:

$$x_1 > a^{(n)}$$

przy n jakimkolwiek.

Przeto ciąg [3], jako rosnący, którego wyrazy pozostają $< x_1$, ma granicę $\leqslant x_1$.

Porównajmy teraz x i a^x.

Przy $x = 1$ $\qquad a^x = a; \quad a^x > x.$

Przy $x > 1$ $\qquad a^x = x$

tylko przy 2-ch wartościach x: $x_1 < e$, $x_2 > e$; stąd wnosimy, że krzywa $y = a^x$ jest do krzywej: $y = x$ w stosunku, przedstawionym na fig. 2-ej (ponieważ innych pierwiastków prócz x_1 i x_2 *), równanie $x = a^x$ nie posiada).

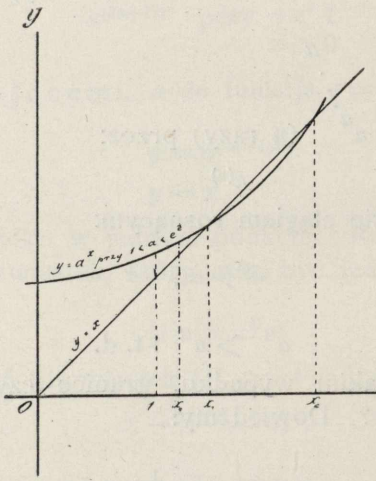


Fig. 2.

Przypuśćmy teraz:

$$\lim_{n=\infty} a^{(n)} = x_0\,; \; x_0 < x_1\,;$$

wtedy (p. rysunek):

$$a^{x_0} > x_0$$

a ponieważ $a > 1$

$$log_a(a^{x_0}) > log_a x_0$$

czyli

$$x_0 > log_a x^0,$$

---

*) P. rozwiązania zadań w zeszycie 3-im „Wektora".

więc można znaleźć takie n_1, iż dla $n > n_1$: (ponieważ $x_0 = \lim_{n=\infty} a^{(n)}$)

$$\log_a x_0 < a^{(n)} ;$$

ale wtedy:

$$a^{\log_a x_0} < a^{a^{(n)}} ,$$

czyli:

$$x^0 < a^{(n+1)} ,$$

co przeczy założeniu, bo x jest większe od wszelkiego $a^{(n)}$.

Przeto $\lim_{n=\infty} a^{(n)} = x_1$

c. b. d. d.

Gdy $a = e^{\frac{1}{e}}$,

$$x_1 = x_2 = e ;$$

wtedy:

$$\lim_{n=\infty} a^{(n)} = e .$$

Rozpatrzmy teraz ciąg [3] przy $a < 1$.

Mamy wtedy:

$$a < 1$$

$a^a > a$ (ponieważ gdy liczbę < 1 podnosimy do potęgi < 1, to ją przez to powiększamy);

stąd:

$a^{a^a} < a^a$ (bo im większy w tym wypadku wykładnik, tym mniejsza potęga)

$$a^{a^{a^a}} > a^{a^a}$$

i t. d.

Ciąg tedy nieskończony [3[nie jest ani rosnący, ani malejący — sprawdzimy zaraz, iż można go podzielić na 2 ciągi: jeden rosnący, drugi malejący.

Mamy:

$$a^a < 1 ;$$

stąd:

$$a^{a^a} > a ,$$

i dalej:

$$a^{a^{a^a}} < a^a ;$$

następnie:

$$a^{a^{a^{a^{a}}}} > a^{a^{a}}$$

i t. d.

Ogólnie, gdy $a^{(2n+1)} > a^{(2n-1)}$,

to:

$$a^{a^{(2n+1)}} < a^{a^{(2n-1)}},$$

czyli:

$$a^{(2n+2)} < a^{(2n)} \quad ,$$

i dalej:

$$a^{(2n+3)} > a^{(2n+1)},$$

a że mamy:

$$a^{(2n+1)} > a^{(2n-1)} \text{ przy } n = 1,$$

więc ogólnie:

$$a < a^{a^{a}} < a^{x^{a^{a^{a}}}} < .... < a^{(2n+1)} < ...$$

$$a^{a} > a^{a^{a^{a}}} > ... > a^{(2n)} > ....$$

Otrzymujemy 2 ciągi nieskończone:

[3a] $$a\,,\; a^{a^{a}}\; ....\,,\; a^{(2n+1)}....$$

[3b] $$a^{a}\;,\; a^{a^{a^{a}}}\;,\; ...\; a^{(2n)},\; ...$$

pierwszy jest c. rosnącym, 2-gi malejącym.

Każdy wyraz ciągu [3a] jest mniejszy od 2-ch odpowiednich wyrazów ciągu [3b]:

$$a^{(2n)} > a^{(2n+1)},$$

$$a^{(2n+2)} > a^{(2n+1)} \quad ,$$

i odwrotnie, każdy wyraz ciągu [3b] jest większy od 2-ch odpowiednich wyrazów ciągu [3a[:

$$a^{(2n)} > a^{(2n+1)},$$

$$a^{(2n)} > a^{(2n-1)},$$

jakeśmy zauważyli z początku. Stąd wnioskujemy:

[m i n — dowolne. $m < n$].

$$a^{(2m)} > a^{(2n)},$$

$$a^{(2n)} > a^{(2n+1)},$$

więc: $$a^{(2m)} > a^{(2n+1)}.$$

Powtarzając podobne dowodzenie przy $m > n$, otrzymujemy, iż ogólnie:

Każdy wyraz ciągu [3a] jest mniejszy od każdego wyrazu ciągu [3b].

Stąd wynika, iż oba ciągi mają granice skończone: x_1 [3a] i x_3 [3b] i że
$$x_1 \leqslant x_3.$$

Wróćmy do równania:

[1] $x = a^x$; wiemy, że przy $0 < a < 1$ pierwiastek równania czyni zadość warunkom:
$$0 < x < 1.$$
$$x < 1 \text{ daje:}$$
$$a^x > a \quad \text{czyli: } x > a \text{ (bo } x = a^x);$$
stąd:
$$a^x < a^a \text{ czyli: } x < a^a;$$
stąd:
$$a^x > a^{a^a} \text{ czyli: } x > a^{a^a},$$
i ogólnie pierwiastek równania [1] odpowiada warunkom:
$$x < a^{(2n)},$$
$$x < a^{(2n+1)}.$$

Tego samego dowiedziemy o każdym pierwiastku równania:
$$x = a^{a^x}.$$
Ponieważ:
$$x < 1:$$
$$a^{a^x} < a^{a^1} \text{ czyli } x < a^a;$$
stąd:
$$a^{a^x} < a^{a^{a^a}} \text{ czyli } x < a^{a^{a^a}}$$
i ogólnie:
$$x < a^{(2n)};$$
ponieważ
$$x > 0:$$
$$a^{a^x} > a^{a^0} \text{ czyli } x > a,$$
$$a^{a^x} > a^{a^a} \text{ czyli } x > a^{a^a} \text{ i t. d.}$$
i ogólnie:
$$x > a^{(2n+1)}.$$

Z tego wynika, że pierwiastków obu równań: $x=a^x$ i $x=a^{a^x}$, a więc i wszystkich równań typu:

$$x=a^{(n)x}$$

szukać należy w przedziale $(x_1 x_3)$ t. j. śród wartości x_1 spełniających warunek:

$$x_1 \leqslant x \leqslant x_3 \ .$$

Dowiedziemy ponadto:

B. Granice ciągów: x_1 i x_3 stanowią pierwiastki równania

$$x=a^{a^x} .$$

1) Zauważmy przedewszystkim, iż każda liczba x_0, należąca do przedziału $(x_1 x_3)$, daje również a^{x_0}, należące do tegoż przedziału:

Istotnie z $$x_0 > a^{(2n-1)}$$

wynika: $$a^{x_0} < a^{(2n)};$$

z $$x^0 < a^{(2n)}$$

wynika: $$a^{x_0} > a^{(2n+1)} .$$

2) Zbadajmy $a^{a^{x_1}}$ — dowiedźmy, że:

$$a^{a^{x_1}} = x_1 .$$

Przypuszczenie: $a^{a^{x_1}} < x_1$ musimy odrzucić, bo na zasadzie poprzedniej uwagi $a^{a^{x_1}}$ należy do przedziału $(x_1 x_3)$ (a^{x_1} należy do tego przedziału, więc i $a^{a^{x_1}}$), więc nie może być $< x_1$, ponieważ x_1 jest najmniejszą liczbą w tym przedziale.

Przypuszczenie:

$$a^{a^{x_1}} > x_1 \text{ daje:}$$

$$log_a [log_a (a^{a^{x_1}})] > log_a [log_a x_1] ,$$

$$x_1 > log_a (log_a x_1) \ .$$

Ale $log_a(log_a x_1)$ należy również do przedziału $(x_1 x_3)$, co łatwo stwierdzić za pomocą dowodzenia, podobnego zupełnie[3]) do użytego w uwa-

---

[3]) $$x_1 < a^{(2n)} \text{ daje:}$$

$$log_a [log_a (a^{a^{x_1}})] < a^{(2n-2)}; \text{ czyli: } x_1 < a^{(2n-2)}$$

$$x_1 > a^{(2n+1)}$$

daje: $$log_a [log_a (a^{a^{x_1}})] > a^{(2n-1)}; \ x_1 > a^{(2n-1)}$$

c. b. d. d.

dze 1), więc otrzymujemy znowu tę samą niezgodność z założeniem.

Pozostaje:

$$a^{a^{x_1}} = x_1 .$$

W sposób zupełnie podobny, uchylając przypuszczenia:

$$a^{a^{x_3}} > x_3 ,$$

$$a^{a^{x_3}} < x_3 ,$$

(więc: $log_a [log_a(a^{a^{x_3}})] < log_a(log_a x_3)$ i t. d.)

otrzymujemy:

$$a^{a^{x_3}} = x_3 .$$

c. b. d. d.

Uważając, że pierwiastek równania [1] $x = a^x$ znajduje się również w przedziale $(x_1 x_3)$ i uwzględniając wyniki, podane w części I twierdz. A, otrzymujemy następujące wnioski.

C. Przy $1 > a \geqslant e^{-e}$ oba ciągi nieskończone:

[3a] $$a ,\ a^{a^a} \ldots .\ a^{(2n+1)} ,\ \ldots .$$

[3b] $$a^a ,\ a^{a^{a^a}} \ldots .\ a^{(2n)} ,\ \ldots . .$$

posiadają granicę wspólną, równą jedynemu pierwiastkowi wszystkich równań typu:

$$x = a^{(n)x}$$

czyli:

$$x = a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}$$

(a powtórzone w ten sposób n razy).

Granica owa, zależna od a, przy $a = e^{-e}$, równa się: $\frac{1}{e}$.

D. Przy: $e^{-e} > a > 0$

granica x_1 ciągu [3a] jest mniejsza od granicy x_3 ciągu [3b], zarówno x_1 jak x_3 stanowią pierwiastki równania:

$$x = a^{a^x}$$

i ogólnie równań typu:

$$x=a^{(2n)x}\ ;$$

pomiędzy temi dwiema wartościami znajduje się trzecia x_2, stanowiąca jedyny pierwiastek równania $x=a^x$ i wogóle równań typu:

$$x=a^{(2n+1)x_1}\ ,$$

a trzeci pierwiastek równań typu:

$$x=a^{(2n)x}\ .$$

Tadeusz Łazowski.